2011 年度夏の LA シンポジウム [1]

関数最適化に基づくアルゴリズムの性能解析

藤原 洋志*　　　関口 良行†

1　はじめに

Chung らは, 均一な複数機械上において重みなしジョブ完了時刻の和を最小化するオンラインスケジューリング問題（プリエンプションを許す）に対し, アルゴリズム SRPT の競合比が 1.857 以下であることを証明した [CNS10]. この問題はグラハムの記法では $P|r_j, pmtn|\sum_j C_j$ と書ける (ただしジョブ到着はオンライン). アルゴリズム SRPT は単純に, 現在未完了のジョブのうち, 残りの処理時間が最小のものを実行する. このアルゴリズムが競合比 2 以下であることは以前から知られていた [PSW98]. 多くの研究者が真の競合比は 2 を切るのではないかと予想していたが長い間未解決であった.

さて, アルゴリズム SRPT 自体は決定性アルゴリズムであるが, Chung らの証明は確率的証明である. しかしながら, 証明に用いられている確率分布の選択は最適でなかった. 我々は, 関数最適化の議論から最適な確率分布を求め, 結果として**アルゴリズム SRPT の競合比が 1.792 以下**であることを示す.

ただし**我々の結果はもはや現在の最良ではない**. Sitters は全く別の手法によりアルゴリズム SRPT の競合比が 1.250 以下であることを証明した [Sit10]. 我々の成果は, あくまで Chung らの証明の枠組みの中での最良であることに注意されたい.

それでもなお, この結果を発表する意義は十分にあると信じている. トップカンファレンスの論文でさえも関数最適化の議論を詰め切れていないということは, とりもなおさずアルゴリズムの性能解析全般において関数最適化の活躍の場が大いに残されていることを示唆しているからである. 本稿の目的は, 我々の結果を例に, **関数最適化がアルゴリズムの性能解析において如何に有用であるか**を知らしめることである.

本稿の議論は関数解析や非線形最適化の知識を必要とする. 例えば, 関数空間を, 含む一般のベクトル空間上の最適化や双対性については [Lue69] を, 関数解析については [高村 84] を参考にされたい.

* 豊橋技術科学大学
† 東京海洋大学

2　問題の定式化と観察

Chung らは確率を用いた議論により, 次の定理を証明した. 彼らは密度関数 $g(x) = 7(1-x)^6$ を適用し, 競合比 1.857 を得ている.

定理 1. *([CNS10])* X を区間 $[0,1]$ 上の確率変数とする. アルゴリズム $SRPT$ の競合比は

$$\begin{aligned}&E[X]\\&+\max_{0\le a\le 1}\frac{1}{1+a}(\Pr[0\le X\le a]\\&\quad+\Pr[a<X\le 1]E[X|a<X\le 1])\\&+1\end{aligned}$$

以下である.

我々はこれを最適化問題として定式化し, 最適な確率分布の求解を試みる. 分布関数 (累積分布関数ともいう)$G(x) = \Pr[X \le x]$ とする. $G \in \mathrm{ND}[0,1]$ (単調非減少関数) に対して,

$$L(G) = \int_0^1 x\, dG(x)$$

$$A(G) = \int_0^1 dG(x)$$

$$B(G)(a) = \frac{1}{1+a}\left(\int_0^a dG(x) + \int_a^1 x dG(x)\right), a \in [0,1]$$

とおくと, 問題は

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{P}) \quad & \min\ L(G)+\beta && (1)\\
& \text{s.t. } A(G)=1 && (2)\\
& \quad B(G)(a)\le\beta, a\in[0,1] && (3)\\
& \quad G\in \mathrm{ND}[0,1] && (4)
\end{aligned}
$$

と書ける. いま, $L:\mathrm{ND}[0,1]\to\mathbb{R}$, $A:\mathrm{ND}[0,1]\to\mathbb{R}$ はそれぞれ線形写像である.

ここで, 線形写像 B の像について考える. まず, $a\mapsto\int_0^a dG(x)$ と $a\mapsto\int_a^1 xdG(x)$ は $\mathrm{ND}[0,1]$ であるので, $a\mapsto B(G)(a)$ は可測関数である. また

$$
\begin{aligned}
|B(G)(a)| &\le \frac{1}{1+a}\left(\left|\int_0^a dG(x)\right|+\left|\int_a^1 xdG(x)\right|\right)\\
&\le \frac{1}{1+a}\left(\int_0^1 dG(x)+\int_0^1 xdG(x)\right)
\end{aligned}
$$

より有界なので, $B(G)\in L^\infty[0,1]$ である.

3 最適性十分条件の導出

補題 1. 問題 $(\mathcal{P})$ の制約を満たす $\overline{G},\overline{\beta}$ に対して, ある $\lambda\in\mathbb{R}$, $\mu\in L^1[0,1]$, $\nu\in C[0,1]$ (連続関数) が存在して,

$$
\begin{aligned}
&-L(H)-\eta=\lambda A(H)\\
&+\int_0^1\mu(x)\left\{B(H)(x)-\eta\right\}dx\\
&-\int_0^1\nu(x)\,dH(x), \forall\eta\in\mathbb{R}, H\in\mathrm{ND}[0,1]; && (5)\\
&\int_0^1\mu(x)\left(B(\overline{G})(x)-\overline{\beta}\right)dx=0; && (6)\\
&\int_0^1\nu(x)\,d\overline{G}(x)=0; && (7)\\
&\mu(x)\ge0, \nu(x)\ge0, x\in[0,1] && (8)
\end{aligned}
$$

を満たすとする. すると $\overline{G},\overline{\beta}$ は問題 $(\mathcal{P})$ の最小解になる.

Proof. まず,

$$
\begin{aligned}
L(\overline{G})+\bar{\beta}=&-\lambda A(\overline{G})\\
&-\int_0^1\mu(x)\left\{B(\overline{G})(x)-\bar{\beta}\right\}dx\\
&+\int_0^1\nu(x)\,d\overline{G}(x)\\
=&-\lambda
\end{aligned}
$$

となる. 次に G を問題 $(\mathcal{P})$ の制約を満たす任意の関数とする. ここで, G が制約を満たしていることと, 関数の符号より,

$$
\begin{aligned}
&A(G)=1;\\
&\int_0^1\mu(x)B(G)(x)\,dx\le\int_0^1\mu(x)\beta\,dx;\\
&\int_0^1\nu(x)\,dG(x)\ge0
\end{aligned}
$$

なので,

$$
\begin{aligned}
L(G)+\beta=&-\lambda A(G)\\
&-\int_0^1\mu(x)\left\{B(G)(x)-\beta\right\}dx\\
&+\int_0^1\nu(x)\,dG(x)\\
\ge&-\lambda\\
=&L(\overline{G})+\bar{\beta}.
\end{aligned}
$$

□

補足 1. 線形計画の最適性と同じように証明ができる. 気をつけなければならないのは, ラグランジュ乗数 (普通は双対空間の元) に対応する関数 μ と ν と, それぞれ $B(G)$ と $dG(x)$ を掛けた積分が可積分であるように, 写像 B の像空間と μ, ν の関数空間を選ぶところである. ここでは双対関係になる用に関数空間を選んでいるので, 積分は定義され有限値になっている. なお, 写像 L, A, B は連続だが, 証明には連続性も必要ない.

4 解の推測

密度関数 $g = \frac{dG}{dx}$ が存在し, 問題 $(\mathcal{P})$ の制約 (3) が全ての $a \in [0, 1]$ について等号成立すると仮定してみよう．すると微分方程式を解くことにより $g(a) = \frac{\beta}{1-a}$ が得られる．しかしこれでは $\int_0^1 g(a)da$ が発散することから, 少なくとも 1 が含まれる区間では制約 (3) の等号は成立しないことが分かる．また, この分布関数 G が 0 以外において不連続点を持つとしよう．それを 0 に移動すると, 実行可能性を失うことなく目的関数値が減少することが分かる．

これらの観察から, 最適な分布は以下の性質を満たすものと推測する． (I) G は $(0, 1)$ 上微分可能. (II) 制約 (3) はある区間 $(0, \gamma]$ 上で等号成立． (III) $x \in (\gamma, 1]$ に対して $g(x) = 0$． (IV) G は点 0 にて不連続．このように狭められた解空間上の部分問題 $(\mathcal{Q})$ を定式化する．便宜上, $g(0) = g(1) = 0$ かつ $\lim_{x\to -0} G(x) = 0$ と定義する．こうすることにより積分は次のように計算される．$0 < x \le 1$ に対し

$$\int_0^x f(t)dG(t) = f(0)G(0) + \int_0^x f(t)g(t)dt.$$

$$(\mathcal{Q}) \quad \min \int_0^\gamma xg(x)dx + \beta \tag{9}$$

$$\text{s.t. } G(0) + \int_0^\gamma g(x)dx - 1 = 0, \tag{10}$$

$$\frac{1}{1+a}\Big(G(0) + \int_0^a g(x)dx + \int_a^\gamma xg(x)dx\Big) - \beta = 0, a \in (0, \gamma] \tag{11}$$

$$g(x) = 0, a \in (\gamma, 1].$$

補題 2.

$$G_0(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1+\gamma_0} \ln \frac{1-x}{1-\gamma_0}, & x \in [0, \gamma_0]; \\ 1, & x \in (\gamma_0, 1], \end{cases}$$

$\beta_0 = 1/(1 + \gamma_0)$ は問題 $(\mathcal{Q})$ の大域最適解である *(図 1 参照)*．目的関数値は $\frac{1-\gamma_0-\ln(1-\gamma_0)}{1+\gamma_0}$． ここで γ_0 (≈ 0.44) は $1 - 3\gamma - (1 - \gamma)\ln(1 - \gamma) = 0$ の解である．

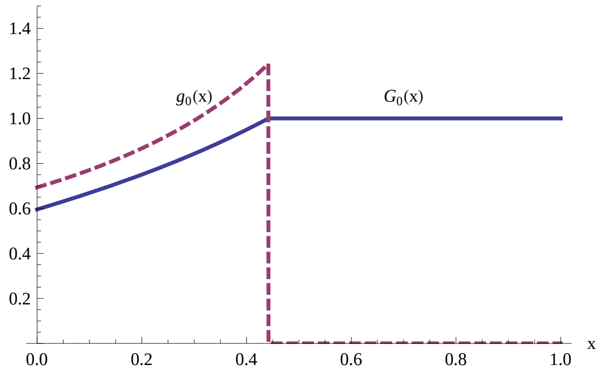

図 1: 最適な確率分布．分布関数 G_0 と密度関数 g_0 のグラフ．g_0 は 0 においてデルタ関数である．

Proof. 制約を用いて目的関数に代入し変数消去を行い最適化する．制約 (11) は

$$G(0)+\int_0^a g(x)dx+\int_a^\gamma xg(x)dx-\beta(1+a) = 0 \tag{12}$$

と書き直せる．これを a で微分して次を得る．

$$g(a) = \frac{\beta}{1-a}. \tag{13}$$

これを (12) を代入して

$$G(0) - \beta(1 + \gamma) - \beta \ln(1 - \gamma) = 0.$$

他方, (10) からは次の関係が得られる．

$$G(0) - \beta \ln(1 - \gamma) - 1 = 0.$$

$G(0)$ を消去して,

$$\beta = \frac{1}{1+\gamma}.$$

以上から, 目的関数 (9) は

$$\frac{1 - \gamma - \ln(1 - \gamma)}{1 + \gamma} \tag{14}$$

と書ける．これを γ で微分して

$$-\frac{1 - 3\gamma - (1 - \gamma)\ln(1 - \gamma)}{(1 - \gamma)(1 + \gamma)^2}.$$

$\gamma = \gamma_0$ のとき, (14) は最小値 $\gamma_0/(1 - \gamma_0) \approx 0.79$ を達成する．ここで $\gamma_0 \approx 0.44$ は $1-3\gamma-(1-\gamma)\ln(1-\gamma) = 0$ の解である．また $G(0) = 1+\ln(1-\gamma_0)/(1+\gamma_0) \approx 0.60$, $\beta = 1/(1 + \gamma_0) \approx 0.69$ と定まる． □

5　最適性十分条件の確認

定理 2. G_0, β_0 は問題 $(\mathcal{P})$ の大域最適解である．

Proof. G_0 に対して, 補題 1 の条件を満たす λ, μ, ν が見つかることを示す．まずは (5) が成立するための十分条件を調べる．(5) にて $\eta = 0$ とすると,

$$-L(H) = \lambda A(H) + \int_0^1 \mu(x) B(H)(x)\, dx - \int_0^1 \nu(x)\, dH(x), \forall H \in \mathrm{ND}[0,1];$$

この右辺第 2 項の積分順序を交換することにより

$$\int_0^1 \left(x + \lambda + \int_x^1 \frac{\mu(a)}{1+a} da + x \int_0^x \frac{\mu(a)}{1+a} da - \nu(x) \right) dH(x) = 0, \forall H \in \mathrm{ND}[0,1] \quad (15)$$

と書ける．これが成り立つ十分条件は全ての $x \in [0,1]$ について

$$x + \lambda + \int_x^1 \frac{\mu(a)}{1+a} da + x \int_0^x \frac{\mu(a)}{1+a} da - \nu(x) = 0 \quad (16)$$

が成立することである．他方 (5) にて $H(x) = 0, \forall x \in [0,1]$ を代入した条件が全ての η について成立する十分条件は

$$1 - \int_0^1 \mu(x) dx = 0 \quad (17)$$

である．

G_0 を (7) に形式的に代入してみよう．$a \in [0, \gamma_0]$ に対して $g_0(a) > 0$ であった．(8) と (7) の条件を満たすには $a \in [0, \gamma_0]$ に対して $\nu(a) = 0$ であればよい．他方 $a \in (\gamma_0, 1]$ に対し (3) の不等号は真に成立する．上と同様の議論に従い, (6) と (8) を満たすには $a \in (\gamma_0, 1]$ について $\mu(a) = 0$ であればよい．

$\nu(a) = 0$ $(a \in [0, \gamma_0])$ を (16) に代入すると積分方程式が得られる．それを解くと,

$$\mu(a) = \frac{1+a}{(1-a)^2}, a \in [0, \gamma_0].$$

が得られる．ここで積分定数は (17) から定まる．(16) から

$$\lambda = -\frac{\gamma_0}{1-\gamma_0}.$$

$x \in (\gamma_0, 1]$ について再度 (16) から

$$\nu(a) = \frac{a - \gamma_0}{1 - \gamma_0}, a \in (\gamma_0, 1].$$

得られた λ, μ, ν は確かに補題 1 を満たす．　□

系 1. アルゴリズム *SRPT* の競合比は *1.792* 以下である．

参考文献

[CNS10] C. Chung, T. Nonner, and A. Souza. Srpt is 1.86-competitive for completion time scheduling. In *Proc. SODA '10*, pp. 1373–1388, 2010.

[Lue69] D. G. Luenberger. *Optimization by vector space methods*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1969.

[PSW98] C. A. Phillips, C. Stein, and J. Wein. Minimizing average completion time in the presence of release dates. *Math. Program.*, Vol. 82, pp. 199–223, 1998.

[Sit10] R. Sitters. Efficient algorithms for average completion time scheduling. In *Proc. IPCO '10*, pp. 411–423, 2010.

[高村 84] 高村多賀子. 関数解析入門, 基礎数学シリーズ, 第 19 巻. 朝倉書店, 1984.