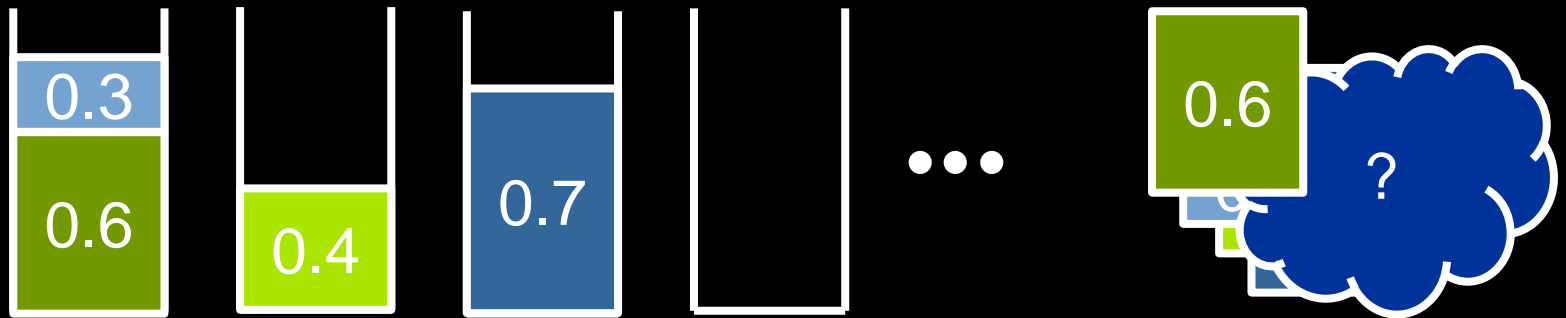


個数制約付きビンパッキング問題に対する 下界の改良



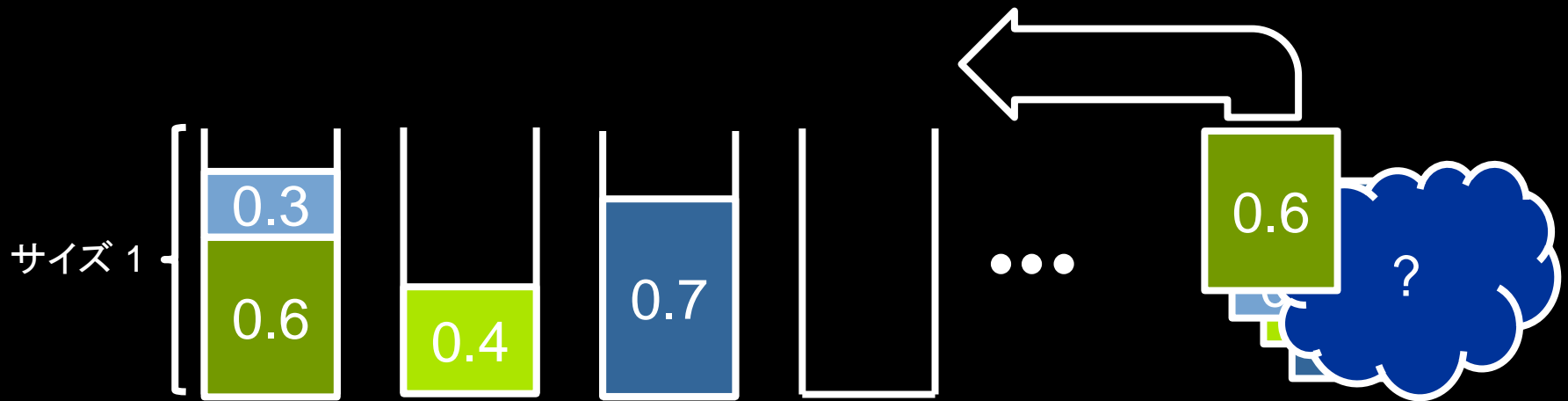
藤原 洋志

小林 浩二

豊橋技術科学大学

国立情報学研究所

ビンパッキング問題



- アイテムをビンに詰めなさい
 - アイテムのサイズは0から1まで
 - ビンのサイズは1
- 将来やってくるアイテムの情報なし
 - サイズやアイテム列終端は不明
- 目的: 使うビンの数を最小化

ビンパッキング問題の例

ON (オンラインアルゴリズム):



OPT (最適なオフラインアルゴリズム):



ビンパッキング問題の例

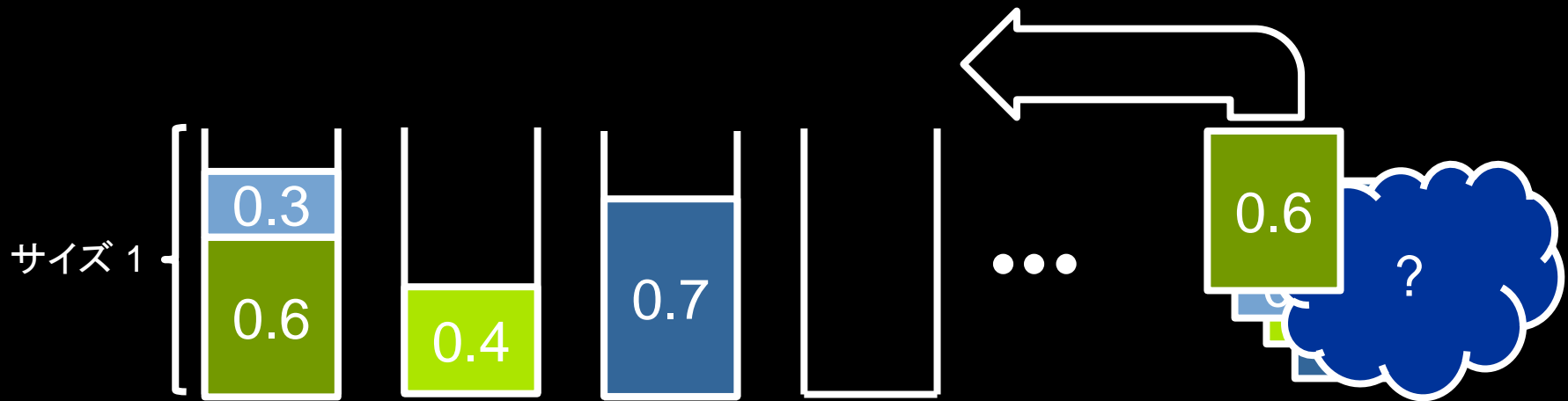
ON:



OPT:



ビンパッキング問題

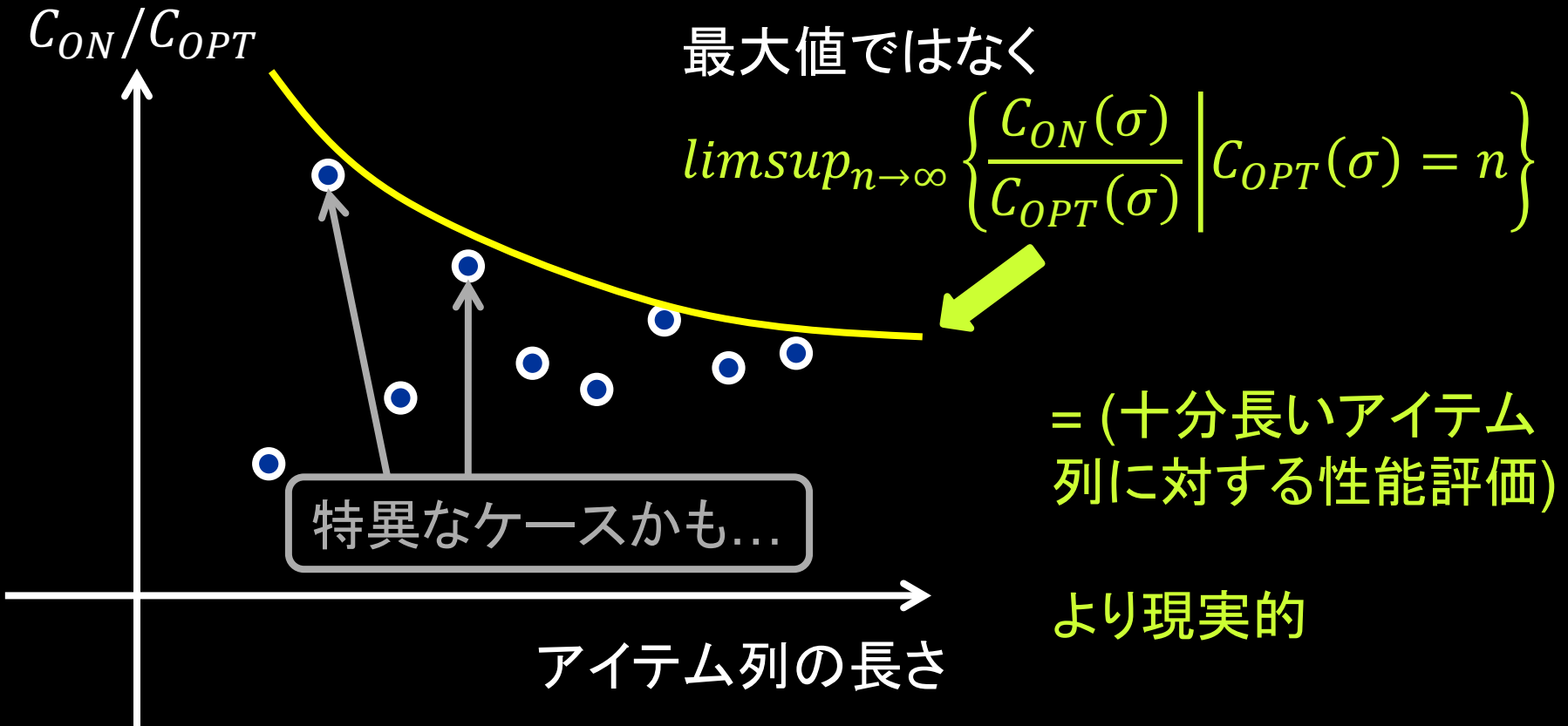


- アイテムをビンに詰めなさい
 - アイテムのサイズは0から1まで
 - ビンのサイズは1
- 将来やってくるアイテムの情報なし
 - サイズやアイテム列終端は不明
- 目的: 使うビンの数を最小化

応用例:

- 負荷分散
- メモリ割り当て

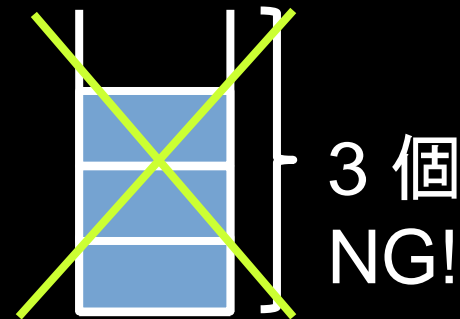
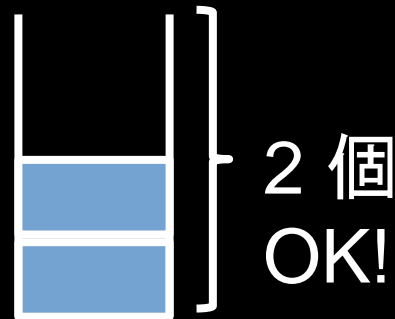
漸近競合比



個数制約付きビンパッキング問題

- 追加制約:
各ビンに入るアイテム数の最大値

- 例: 個数制約 = 2



既存結果

個数制約	下界	上界
2	1.41421 [Babel et al. 04]	1.44721 [Babel et al. 04]
3	1.5 [Babel et al. 04]	1.75 [Epstein 06]
4	1.33333 [van Vliet 92]	1.86843 [Epstein 06]
5	1.33333 [van Vliet 92]	1.93719 [Epstein 06]
6	1.5 [Yao 80]	1.99306 [Epstein 06]
7 to 9	1.5 [Yao 80]	2 [Babel et al. 04]
10 to 41	1.5 [Yao 80]	2 [Babel et al. 04]
≥ 42	1.539 [van Vliet 92]	2 [Babel et al. 04]
なし	1.54037 [Balogh et al. 12]	1.58889 [Seiden 02]

明示的に個数制約を考慮した結果

本研究の結果

個数制約	下界	上界
2	1.41421 → 1.42764	1.44721 [Babel et al. 04]
3	1.5 [Babel et al. 04]	1.75 [Epstein 06]
4	1.33333 → 1.5	1.86843 [Epstein 06]
5	1.33333 → 1.47058	1.93719 [Epstein 06]
6	1.5 [Yao 80]	1.99306 [Epstein 06]
7 to 9	1.5 [Yao 80]	2 [Babel et al. 04]
10 to 41	1.5 → 改良 (予稿を参照)	2 [Babel et al. 04]
≥ 42	1.539 [van Vliet 92]	2 [Babel et al. 04]
なし	1.54037 [Balogh et al. 12]	1.58889 [Seiden 02]

3つのシナリオからなるアイテム列

[van Vliet 92] の手法を拡張し、一般の個数制約に対するスキーム

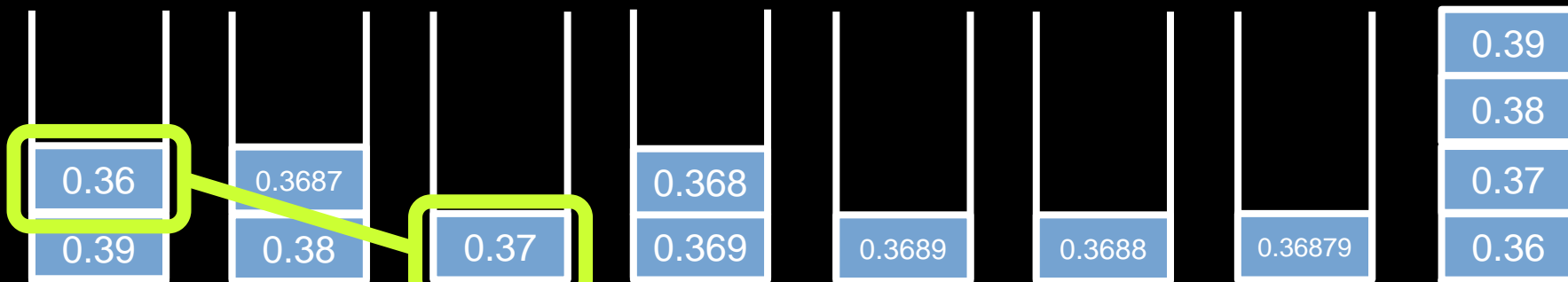
下界の導出の指針

- オンラインアルゴリズムを任意に固定
- オンラインアルゴリズムに対し、意地の悪いアイテム列を与える
- 注意: 漸近競合比の下界を得るには、アイテム列長を任意に選べなければならない
- まずは、個数制約 = 2 に対する下界 1.41421 を解説 [Babel et al. 04]

個数制約 = 2に対する Babel らのアイテム列

[Babel&Chen&Kellerer&Kotov 04]

ON:



続くアイテムサイズはこれらの間

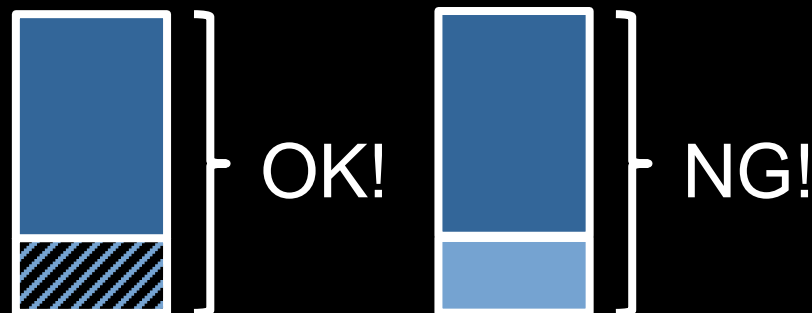
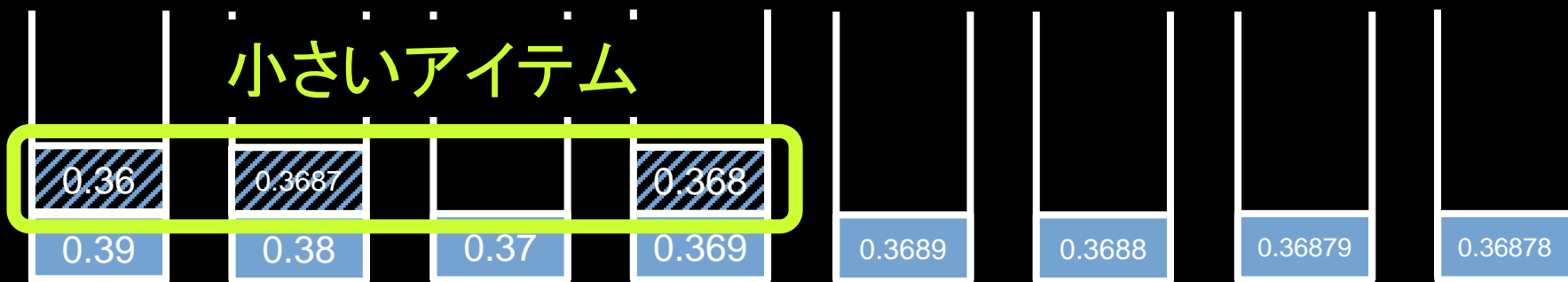
- 基本的にアイテムサイズは単調減少
- もしアイテムが別のアイテムと一緒に詰められたら、続くアイテムサイズは直前に詰めたアイテムと今詰めたアイテムの間の値から選ばれる

個数制約 = 2に対する Babel らのアイテム列

[Babel&Chen&Kellerer&Kotov 04]

ON:

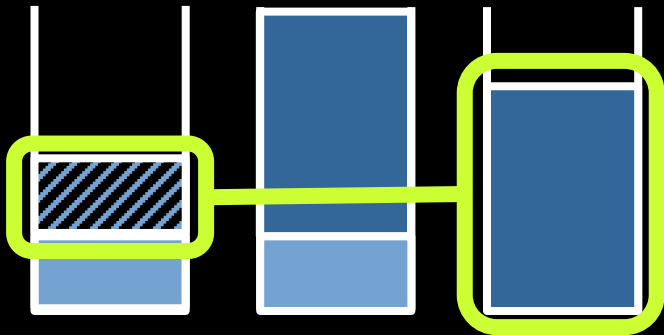
小さいアイテム



シナリオ 1

[Babel&Chen&Kellerer&Kotov 04]

ON:



サイズぴったり与える個数は?
Opt:

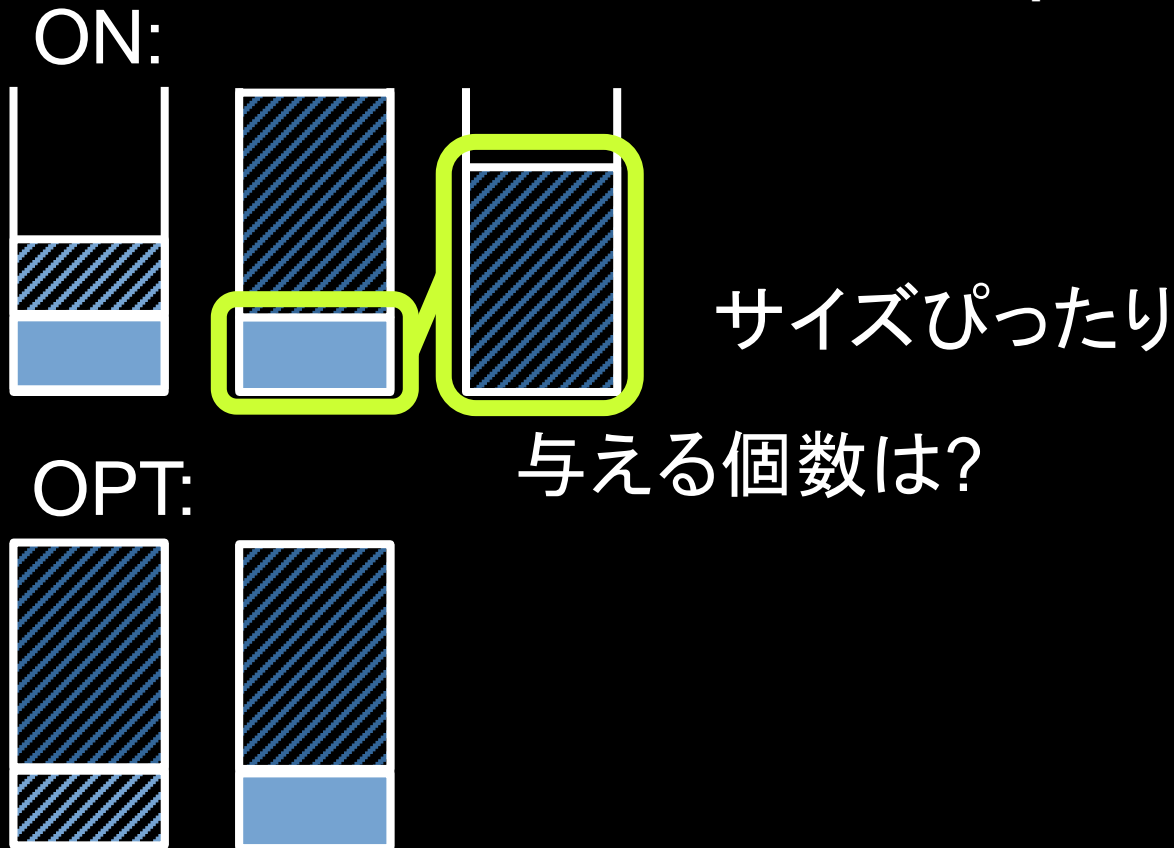


注意:

- 以後、各ビンの図はそのような構成のビンの代表
- つまり、そのような bin は複数存在するかも

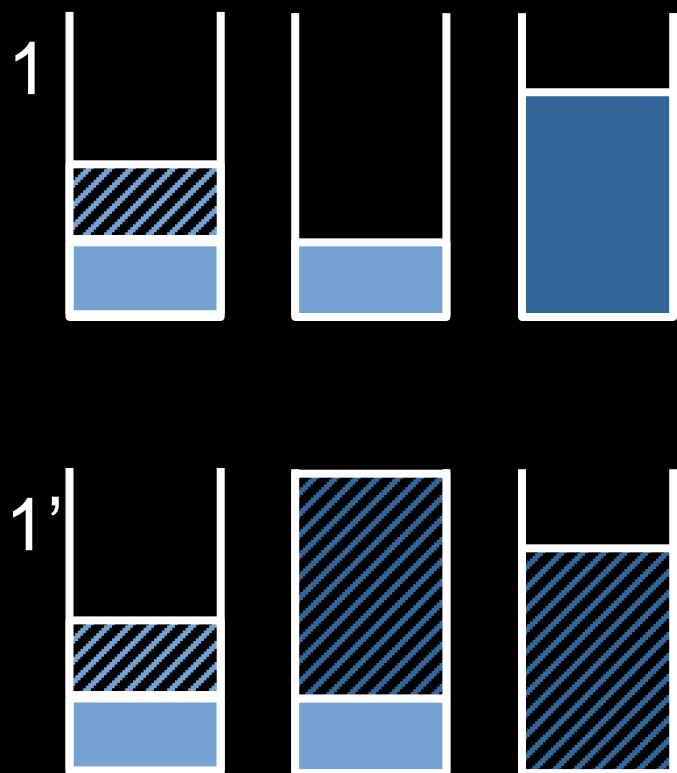
シナリオ 1'

[Babel&Chen&Kellerer&Kotov 04]



個数制約 = 2に対する Babel らの下界

[Babel&Chen&Kellerer&Kotov 04]



- OPTは必ず2個のアイテムを一緒に詰める

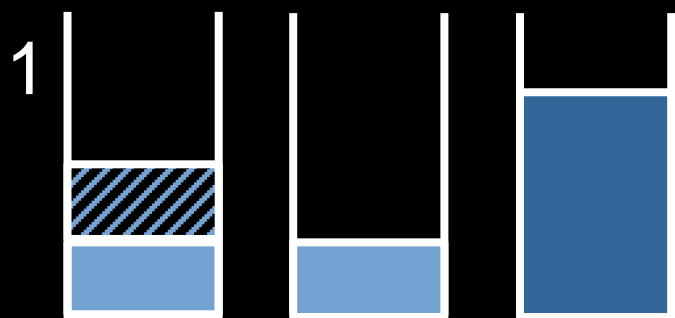
- 端数は無視できる

- ONが2個のアイテムのビンを多く作るほど、シナリオ 1'のビン数比が大

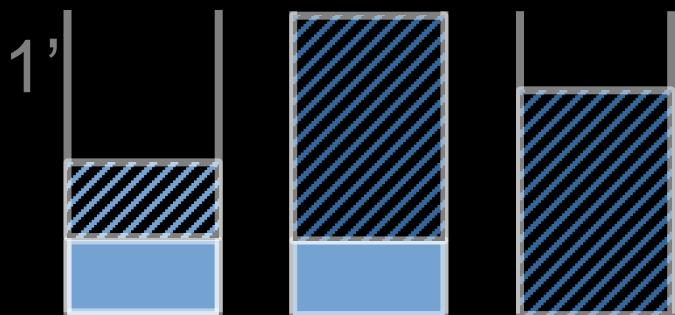
- どちらかのビン数比 > 1.41421

- 2の平方根

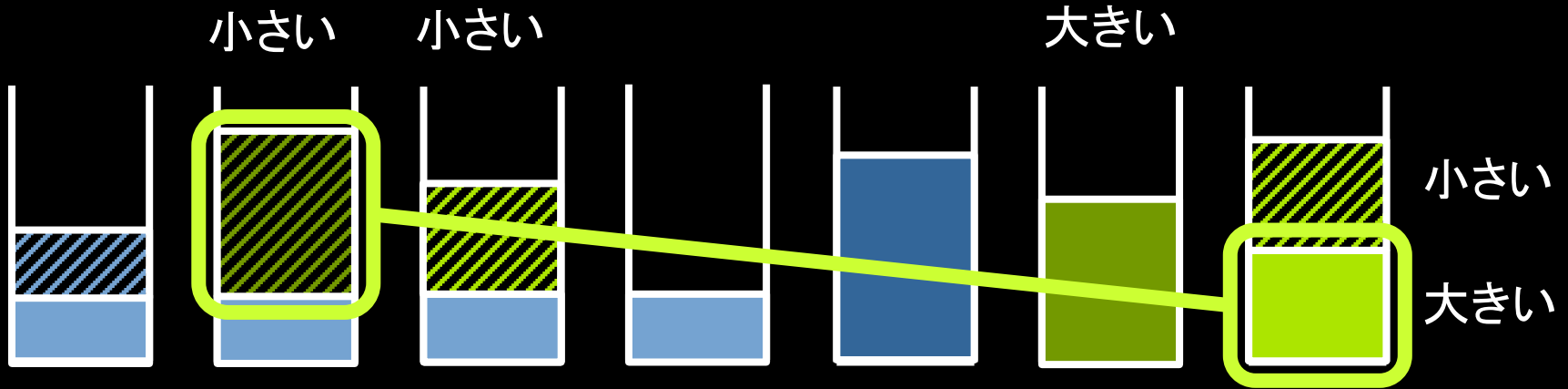
個数制約 = 2に対する 下界の改良



- もっと意地の悪いアイテム列
- シナリオ 1 を使いつつ、もう2つのシナリオを設計
- オンラインアルゴリズムにはどのシナリオが起きているのか判別できないように

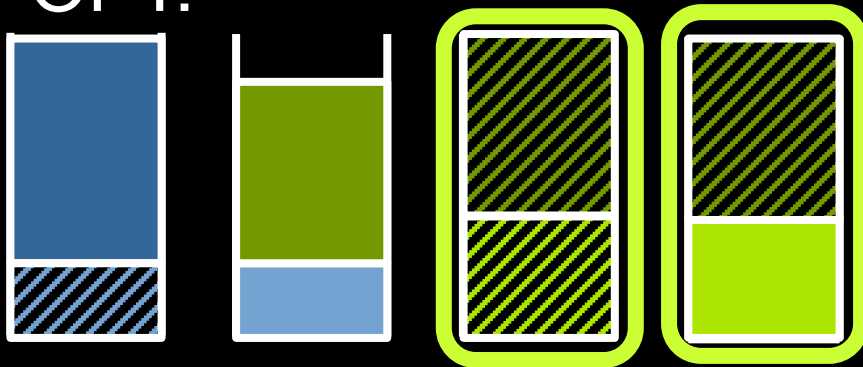


シナリオ 2



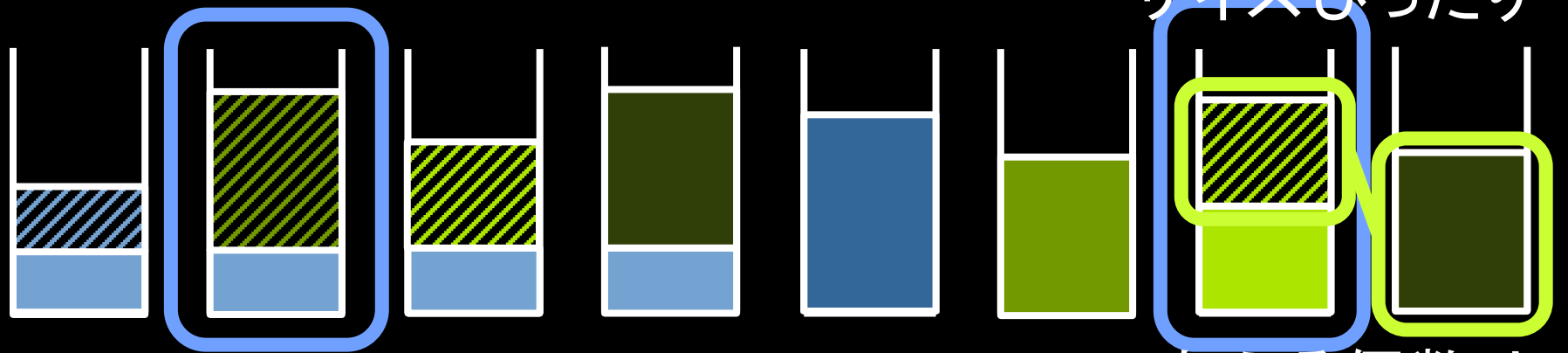
サイズぴったり 与える個数は? 与える個数は?

OPT:



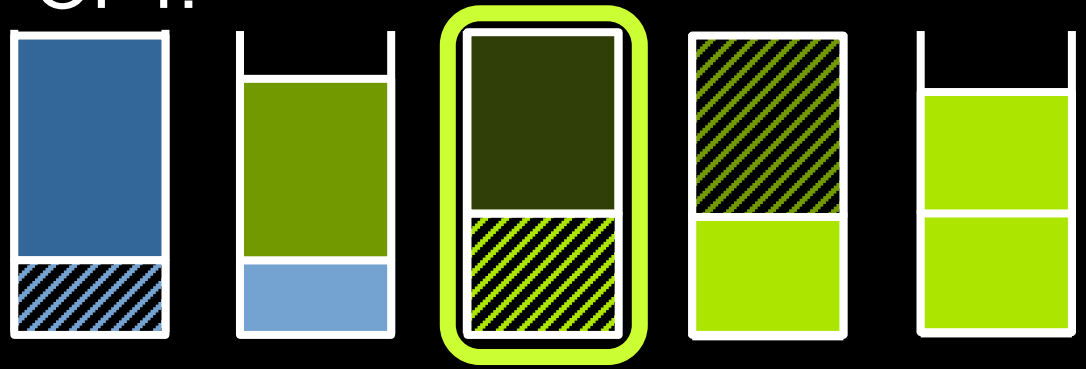
サイズ > 1/2

シナリオ 3

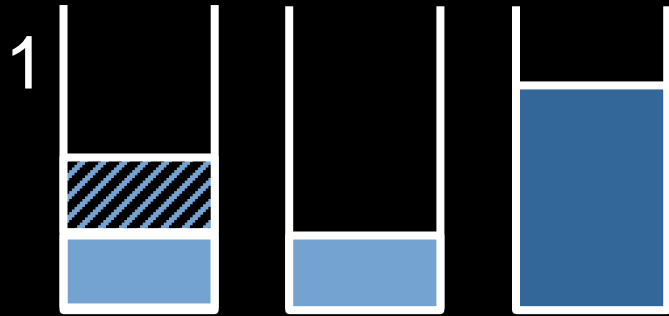


与える個数は?
与える個数は?

OPT:



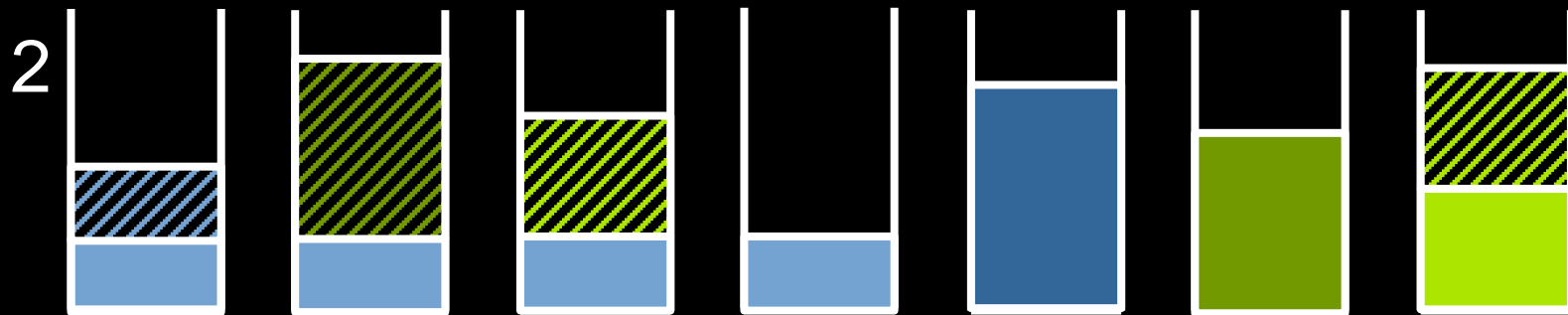
結局...



- OPTは必ず2個のアイテムを一
緒に詰める

- いずれかのビン数比 > 1.42764

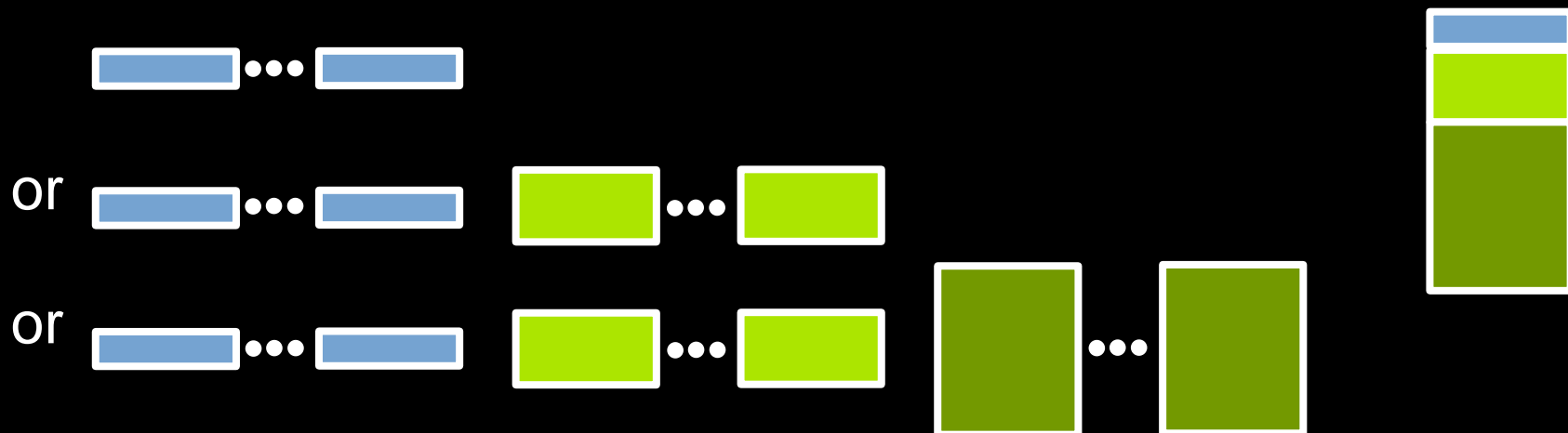
- $2x^3 - 17x^2 + 30x - 14 = 0$ の根



個数制約付きビンパッキング問題に対する下界の改良

藤原 洋志 小林 浩二

個数制約 ≥ 4 に対する 下界の改良



■ 線形計画に定式化 [van Vliet 92]

■ 変数 = それぞれのタイプのビン数

■ 個数制約を加えて再定式化

■ いくつかの個数制約の場合に対して下界を改良: 4, 5, 10 から 41 まで, ...

まとめ

個数制約	下界	上界
2	1.41421 → 1.42764	1.44721 [Babel et al. 04]
3	1.5 [Babel et al. 04]	1.75 [Epstein 06]
4	1.33333 → 1.5	1.86843 [Epstein 06]
5	1.33333 → 1.47058	1.93719 [Epstein 06]
6	1.5 [Yao 80]	1.99306 [Epstein 06]
7 to 9	1.5 [Yao 80]	2 [Babel et al. 04]
10 to 41	1.5 → 改良 (予稿を参照)	2 [Babel et al. 04]
≥ 42	1.539 [van Vliet 92]	2 [Babel et al. 04]
なし	1.54037 [Balogh et al. 12]	1.58889 [Seiden 02]

今後の課題

- 個数制約 ≥ 4 の下界を導くより良いスキーム
- 上界の改良